Les points massiques pour la modélisation de l'écriture manuscrite

Jean-Paul Bécar[1], Laurent Fuchs[2] et Lionel Garnier[3]

[1]Université de Polytechnique Hauts de France

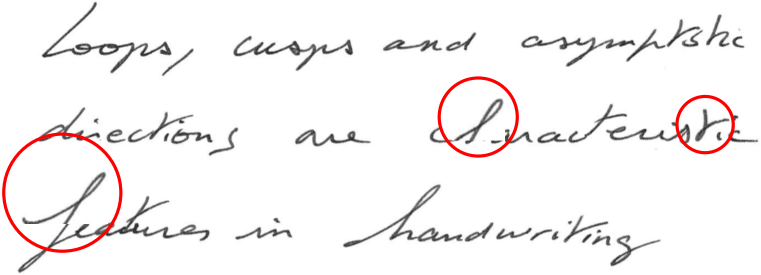
[2]Université de Poitiers

[3]Université de Bourgogne

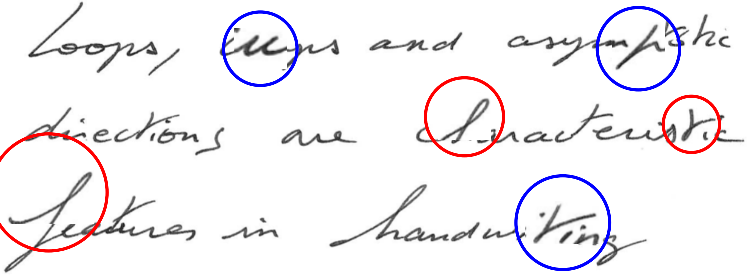
GTMG Nancy
2 et 3 Juillet 2020

Introduction

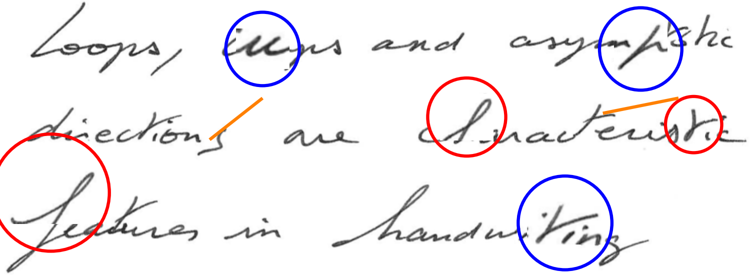
Loops, cusps and asymptotic
directions are characteristic
features in handwriting


Loops, cusps and asymptotic
directions are characteristic
features in handwriting

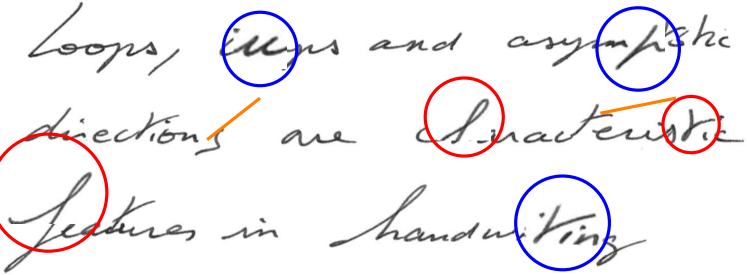
Introduction



Introduction



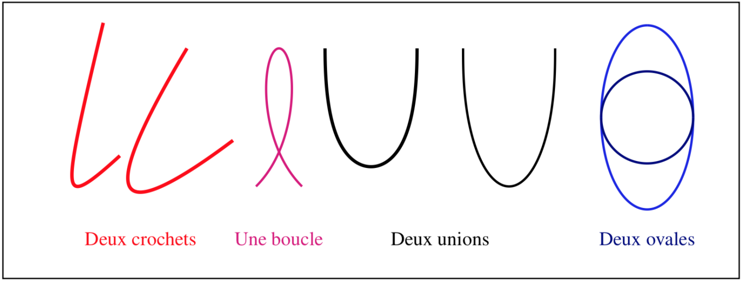
Introduction



Modélisation de l'écriture manuscrite

- Les courbes à points massiques sont adaptées pour modéliser l'écriture manuscrite.

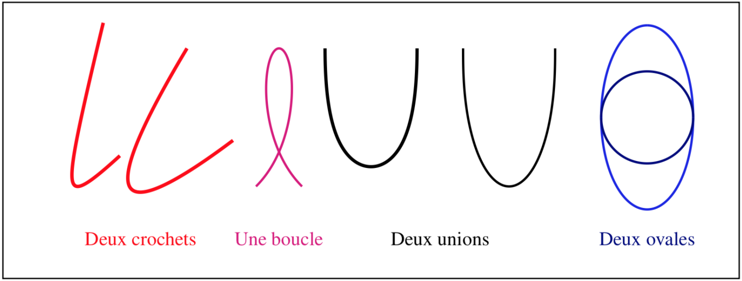
Les tracés de base



- Edelman et Flash [EF87] proposent de construire les caractères à partir de ces tracés.

S. Edelman et T. Flash
A Model of Handwriting.
Biological Cybernetics, 57 :25–36, 1987.

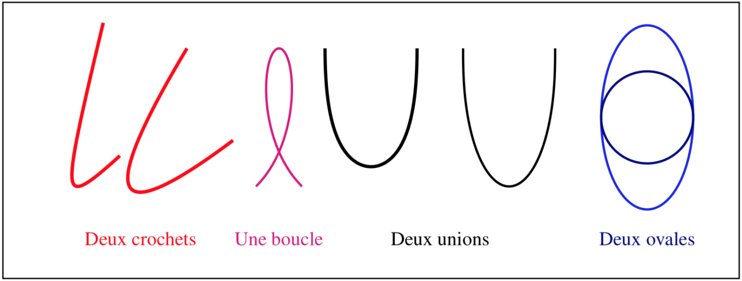
Les tracés de base



- Edelman et Flash [EF87] proposent de construire les caractères à partir de ces tracés.
- Il faut aussi tenir compte de la cinématique du tracé.

S. Edelman et T. Flash
A Model of Handwriting.
Biological Cybernetics, 57 :25–36, 1987.

Les tracés de base



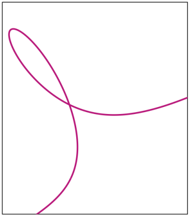
- Edelman et Flash [EF87] proposent de construire les caractères à partir de ces tracés.
- Il faut aussi tenir compte de la cinématique du tracé.
- Et pouvoir sélectionner une partie de la courbe.

S. Edelman et T. Flash
A Model of Handwriting.
Biological Cybernetics, 57 :25–36, 1987.

Les outils

Changement de paramètre homographique

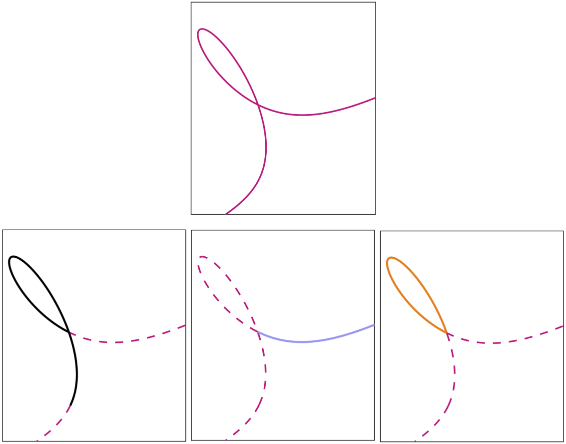
Sélectionner une partie d'une courbe



Les outils

Changement de paramètre homographique

Sélectionner une partie d'une courbe



Sélectionner une partie d'une courbe

- Changement de paramètre homographique

$$t = h(u) = \frac{a(1-u)+bu}{c(1-u)+du} \quad \text{avec} \quad ad \neq bc$$

Sélectionner une partie d'une courbe

- Changement de paramètre homographique

$$t = h(u) = \frac{a(1-u)+bu}{c(1-u)+du} \quad \text{avec} \quad ad \neq bc$$

- On calcule ce que l'on obtient en termes de points de contrôle massiques.

Sélectionner une partie d'une courbe

- Changement de paramètre homographique

$$t = h(u) = \frac{a(1-u)+bu}{c(1-u)+du} \quad \text{avec} \quad ad \neq bc$$

- On calcule ce que l'on obtient en termes de points de contrôle massiques.
- Cela n'augmente pas le degré de la courbe obtenue.

Sélectionner une partie d'une courbe

- Changement de paramètre homographique

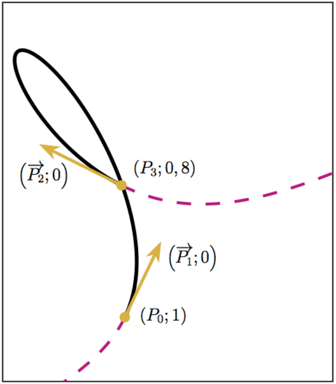
$$t = h(u) = \frac{a(1-u)+bu}{c(1-u)+du} \quad \text{avec} \quad ad \neq bc$$

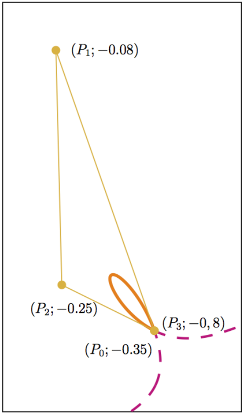
- On calcule ce que l'on obtient en termes de points de contrôle massiques.
- Cela n'augmente pas le degré de la courbe obtenue.
- Cela peut introduire des poids nuls ou négatifs.

Les outils

Changement de paramètre homographique

Sélectionner une partie d'une courbe





Cela montre la nécessité de généraliser les points pondérés en points massiques.

Point massiques

- Aux coordonnées d'un point ou d'un vecteur, on ajoute un poids (positif, négatif ou nul), on obtient les points massiques.

Cela montre la nécessité de généraliser les points pondérés en points massiques.

Point massiques

- Aux coordonnées d'un point ou d'un vecteur, on ajoute un poids (positif, négatif ou nul), on obtient les points massiques.
- Sur les points massiques, on définit les opérations d'addition $\boxplus$ et de multiplication par un scalaire $\boxdot$.

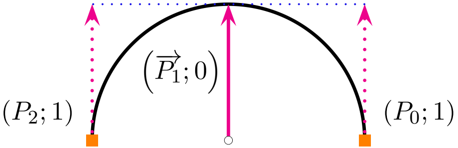
Cela montre la nécessité de généraliser les points pondérés en points massiques.

Point massiques

- Aux coordonnées d'un point ou d'un vecteur, on ajoute un poids (positif, négatif ou nul), on obtient les points massiques.
- Sur les points massiques, on définit les opérations d'addition $\boxplus$ et de multiplication par un scalaire $\boxdot$.
- Lorsqu'un poids est nul on a un vecteur de contrôle

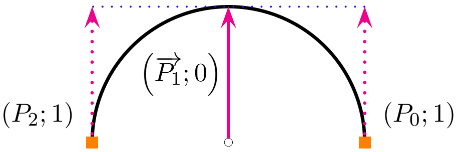
Vecteurs de contrôle

- Un demi-cercle est modélisé avec deux points de contrôle P_0, P_2 et un vecteur de contrôle $\overrightarrow{P_1}$.



Vecteurs de contrôle

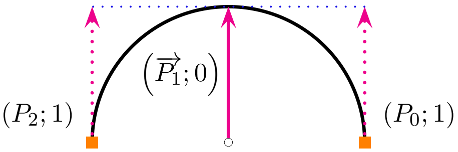
- Un demi-cercle est modélisé avec deux points de contrôle P_0, P_2 et un vecteur de contrôle $\overrightarrow{P_1}$.



- Le vecteur $\overrightarrow{P_1}$ est le vecteur tangent aux extrémités.

Vecteurs de contrôle

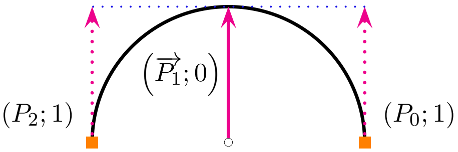
- Un demi-cercle est modélisé avec deux points de contrôle P_0, P_2 et un vecteur de contrôle $\overrightarrow{P_1}$.



- Le vecteur $\overrightarrow{P_1}$ est le vecteur tangent aux extrémités.
- Le paramétrage est uniforme (à $t = 1/2$ on a parcouru la moitié de la courbe).

Vecteurs de contrôle

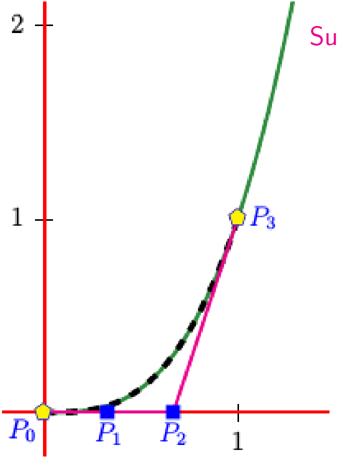
- Un demi-cercle est modélisé avec deux points de contrôle P_0, P_2 et un vecteur de contrôle $\overrightarrow{P_1}$.



- Le vecteur $\overrightarrow{P_1}$ est le vecteur tangent aux extrémités.
- Le paramétrage est uniforme (à $t = 1/2$ on a parcouru la moitié de la courbe).

C'est une modélisation d'un demi-cercle qu'on ne peut pas obtenir avec des points pondérés.

Un exemple étonnant, fonction cube : $x \mapsto x^3$

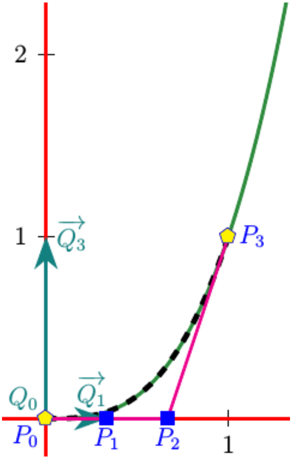


Sur $[0;1]$. Courbe polynomiale

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$$

$$P_0\,(0;0)\,,\ P_1\left(\frac{1}{3};0\right)\ P_2\left(\frac{2}{3};0\right)\ \text{et}\ P_3\,(1;1)$$

Un exemple étonnant, fonction cube : $x \mapsto x^3$



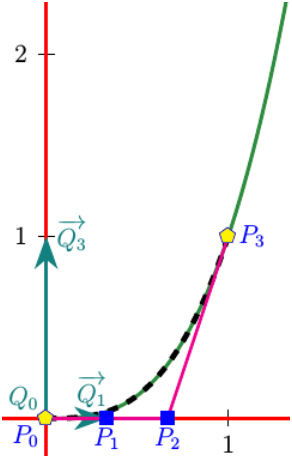
Sur $[0;1]$. Courbe polynomiale

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$$

$$P_0\,(0;0)\,,\ P_1\left(\frac{1}{3};0\right)\ P_2\left(\frac{2}{3};0\right)\ \text{et } P_3\,(1;1)$$

Sur $[0;+\infty]$, euh, $[0;1]$ via $t = \frac{u}{1-u}$.
Un point $\omega_0 = 1$: $Q_0\,(0;0)$

Un exemple étonnant, fonction cube : $x \mapsto x^3$



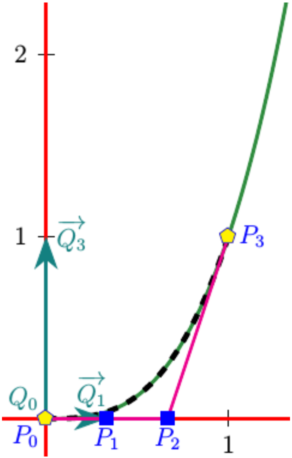
Sur $[0;1]$. Courbe polynomiale

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$$

$$P_0\,(0;0)\,,\ P_1\left(\frac{1}{3};0\right)\ P_2\left(\frac{2}{3};0\right)\ \text{et}\ P_3\,(1;1)$$

Sur $[0;+\infty]$, euh, $[0;1]$ via $t = \frac{u}{1-u}$.
Un point $\omega_0 = 1$: $Q_0\,(0;0)$
Trois vecteurs car $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$

Un exemple étonnant, fonction cube : $x \mapsto x^3$



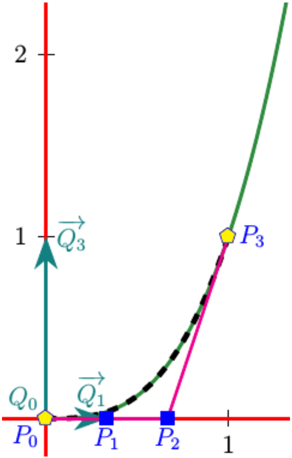
Sur [0; 1]. Courbe polynomiale

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$$

$$P_0\,(0;0)\,,\ P_1\left(\frac{1}{3};0\right)\ P_2\left(\frac{2}{3};0\right) \text{ et } P_3\,(1;1)$$

Sur $[0; +\infty]$, euh, $[0; 1]$ via $t = \frac{u}{1-u}$.
Un point $\omega_0 = 1$: $Q_0\,(0;0)$
Trois vecteurs car $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$
$\overrightarrow{Q_1}\left(\frac{1}{3};0\right)$: vecteur tangent à la courbe en Q_0
$\overrightarrow{Q_3}\,(0;1)$: vecteur directeur de la direction asymptotique.

Un exemple étonnant, fonction cube : $x \mapsto x^3$



Sur $[0;1]$. Courbe polynomiale

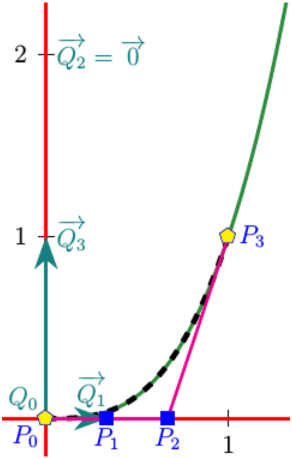
$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$$

$$P_0\,(0;0)\,,\ P_1\left(\frac{1}{3};0\right)\ P_2\left(\frac{2}{3};0\right) \text{ et } P_3\,(1;1)$$

Sur $[0;+\infty]$, euh, $[0;1]$ via $t = \frac{u}{1-u}$.
Un point $\omega_0 = 1$: $Q_0\,(0;0)$
Trois vecteurs car $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$
$\overrightarrow{Q_1}\left(\frac{1}{3};0\right)$: vecteur tangent à la courbe en Q_0
$\overrightarrow{Q_3}\,(0;1)$: vecteur directeur de la direction asymptotique.

Où es-tu $\overrightarrow{Q_2}$?

Un exemple étonnant, fonction cube : $x \mapsto x^3$



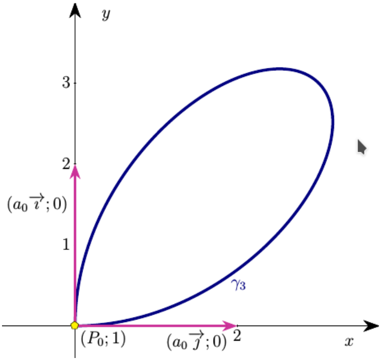
Sur $[0; 1]$. Courbe polynomiale

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$$

$$P_0\,(0;0)\,,\ P_1\left(\frac{1}{3};0\right)\ P_2\left(\frac{2}{3};0\right)\text{ et } P_3\,(1;1)$$

Sur $[0; +\infty]$, euh, $[0; 1]$ via $t = \frac{u}{1-u}$.
Un point $\omega_0 = 1$: $Q_0\,(0; 0)$
Trois vecteurs car $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$
$\overrightarrow{Q_1}\left(\frac{1}{3};0\right)$: vecteur tangent à la courbe en Q_0
$\overrightarrow{Q_3}\,(0; 1)$: vecteur directeur de la direction asymptotique.
Où es-tu $\overrightarrow{Q_2}$? Je suis le vecteur nul : $\overrightarrow{Q_2} = \overrightarrow{0}$

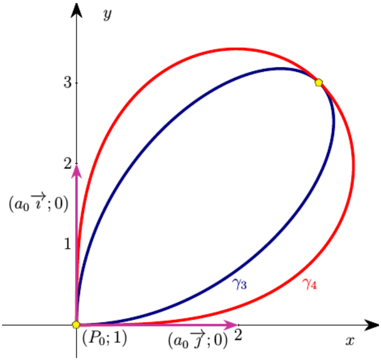
Vecteur nul de contrôle



$a_0 = 2$

Folium de Descartes (degré 3) : $(P_0;1)$, $(a_0\overrightarrow{\imath};0)$, $(a_0\overrightarrow{\jmath};0)$ et $(P_0;1)$.

Vecteur nul de contrôle

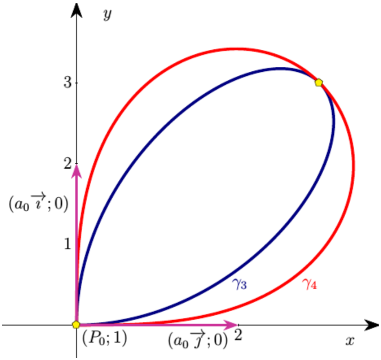


$a_0 = 2$

Folium de Descartes (degré 3) : $(P_0;1)$, $(a_0\overrightarrow{\imath};0)$, $(a_0\overrightarrow{\jmath};0)$ et $(P_0;1)$.

Lemniscate de Bernouilli (degré 4) : $(P_0;1)$, $\left(\frac{3}{4}a_0\overrightarrow{\imath};0\right)$, $\left(\overrightarrow{0};0\right)$, $\left(\frac{3}{4}a_0\overrightarrow{\jmath};0\right)$ et $(P_0;1)$.

Vecteur nul de contrôle

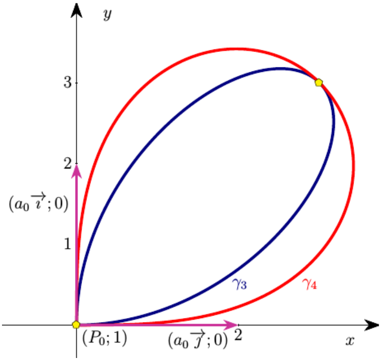


$a_0 = 2$

Folium de Descartes (degré 3) : $(P_0;1)$, $(a_0\vec{\imath};0)$, $(a_0\vec{\jmath};0)$ et $(P_0;1)$.

Lemniscate de Bernouilli (degré 4) : $(P_0;1)$, $\left(\frac{3}{4}a_0\vec{\imath};0\right)$, $\left(\vec{0};0\right)$, $\left(\frac{3}{4}a_0\vec{\jmath};0\right)$ et $(P_0;1)$.

Vecteur nul de contrôle



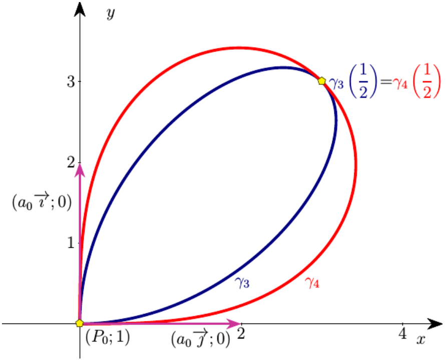
$a_0 = 2$

Folium de Descartes (degré 3) : $(P_0;1)$, $(a_0\overrightarrow{\imath};0)$, $(a_0\overrightarrow{\jmath};0)$ et $(P_0;1)$.

Lemniscate de Bernouilli (degré 4) : $(P_0;1)$, $\left(\frac{3}{4}a_0\overrightarrow{\imath};0\right)$, $\left(\overrightarrow{0};0\right)$, $\left(\frac{3}{4}a_0\overrightarrow{\jmath};0\right)$ et $(P_0;1)$.

Mêmes vecteurs tangents aux extrémités

Vecteur nul de contrôle



$a_0 = 2$

Folium de Descartes (degré 3) : $(P_0;1)$, $(a_0\overrightarrow{\imath};0)$, $(a_0\overrightarrow{\jmath};0)$ et $(P_0;1)$.

Lemniscate de Bernouilli (degré 4) : $(P_0;1)$, $\left(\frac{3}{4}a_0\overrightarrow{\imath};0\right)$, $\left(\overrightarrow{0};0\right)$, $\left(\frac{3}{4}a_0\overrightarrow{\jmath};0\right)$ et $(P_0;1)$.

Mêmes vecteurs tangents aux extrémités

G^1-continuité en $\gamma_3\left(\frac{1}{2}\right)=\gamma_4\left(\frac{1}{2}\right)$

Algorithme

Entrée : $n+1$ points massiques de contrôle $(P_i;\omega_i)_{0\leq i\leq n}$.

Algorithme

Entrée : $n+1$ points massiques de contrôle $(P_i;\omega_i)_{0\leq i\leq n}$.

1. $(Q_0;W_0)=(n+1)\boxdot(P_0;w_0)$

Algorithme

Entrée : $n+1$ points massiques de contrôle $(P_i;\omega_i)_{0\leq i\leq n}$.

1. $(Q_0;W_0)=(n+1)\boxdot(P_0;w_0)$
2. $(Q_{n+1};W_{n+1})=(n+1)\boxdot(P_n;\omega_n)$

Algorithme

Entrée : $n+1$ points massiques de contrôle $(P_i;\omega_i)_{0\leq i\leq n}$.

1. $(Q_0;W_0) = (n+1)\boxdot(P_0;w_0)$
2. $(Q_{n+1};W_{n+1}) = (n+1)\boxdot(P_n;\omega_n)$
3. Pour $k\in[\![1;n]\!]$,
   $(Q_k;W_k) = k\boxdot(P_{k-1};\omega_{k-1})\boxplus(n+1-k)\boxdot(P_k;\omega_k)$

Algorithme

Entrée : $n+1$ points massiques de contrôle $(P_i;\omega_i)_{0\leq i\leq n}$.

1. $(Q_0;W_0)=(n+1)\boxdot(P_0;w_0)$
2. $(Q_{n+1};W_{n+1})=(n+1)\boxdot(P_n;\omega_n)$
3. Pour $k\in[\![1;n]\!]$,
   $(Q_k;W_k)=k\boxdot(P_{k-1};\omega_{k-1})\boxplus(n+1-k)\boxdot(P_k;\omega_k)$

Sortie : $n+2$ points massiques de contrôle $(Q_i;W_i)_{0\leq i\leq n+1}$.

Algorithme

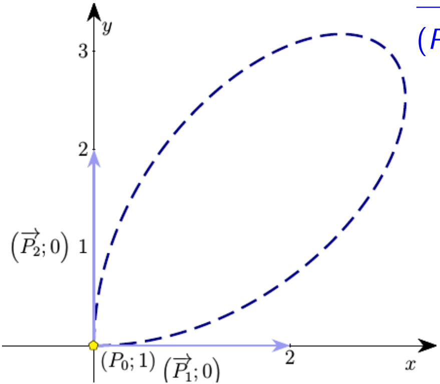
Entrée : $n+1$ points massiques de contrôle $(P_i;\omega_i)_{0\leq i\leq n}$.

1. $(Q_0;W_0) = (n+1) \boxdot (P_0;w_0)$
2. $(Q_{n+1};W_{n+1}) = (n+1) \boxdot (P_n;\omega_n)$
3. Pour $k \in [\![1;n]\!]$,
   $(Q_k;W_k) = k \boxdot (P_{k-1};\omega_{k-1}) \boxplus (n+1-k) \boxdot (P_k;\omega_k)$

Sortie : $n+2$ points massiques de contrôle $(Q_i;W_i)_{0\leq i\leq n+1}$.

Il s'agit d'une généralisation de l'algorithme usuel d'élévation du degré.

Exemple avec le Folium de Descartes

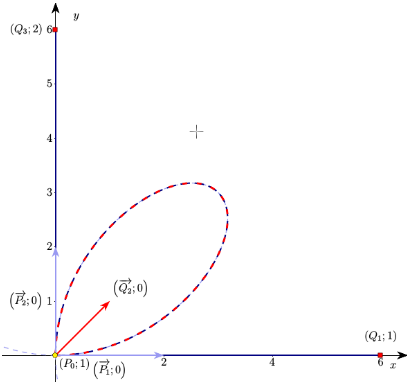


$a_0 = 2$

Degré 3 :

$(P_0;1)$, $(a_0\overrightarrow{\imath};0)$, $(a_0\overrightarrow{\jmath};0)$ et $(P_0;1)$

Exemple avec le Folium de Descartes



$a_0 = 2$

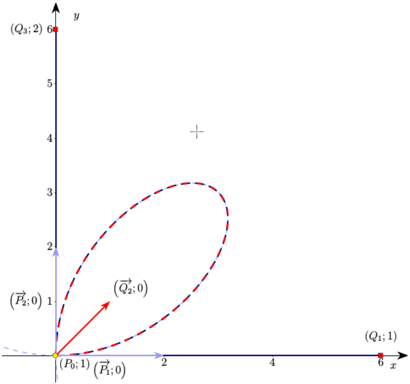
Degré 3 :

$(P_0;1)$, $(a_0\overrightarrow{\imath};0)$, $(a_0\overrightarrow{\jmath};0)$ et $(P_0;1)$

Degré 4 :

$(P_0;1)$
$Q_1\,(3a_0;0)$ et $W_1 = \frac{1}{4}$
$\overrightarrow{Q_2} = \frac{1}{2}a_0\overrightarrow{\imath} + \frac{1}{2}a_0\overrightarrow{\jmath}$, $W_2 = 0$,
$Q_3\,(0;3a_0)$, $W_3 = \frac{1}{4}$
$(P_0;1)$

Exemple avec le Folium de Descartes



$a_0 = 2$

Degré 3 :

$(P_0; 1)$, $(a_0 \overrightarrow{\imath}; 0)$, $(a_0 \overrightarrow{\jmath}; 0)$ et $(P_0; 1)$

Degré 4 :

$(P_0; 1)$
$Q_1\,(3a_0; 0)$ et $W_1 = \frac{1}{4}$
$\overrightarrow{Q_2} = \frac{1}{2} a_0 \overrightarrow{\imath} + \frac{1}{2} a_0 \overrightarrow{\jmath}$, $W_2 = 0$,
$Q_3\,(0; 3a_0)$, $W_3 = \frac{1}{4}$
$(P_0; 1)$

L'algorithme peut transformer des vecteurs en points pondérés et réciproquement.

Afin de pouvoir facilement dénoter les différents arcs de courbe par leurs points de contrôle, ceux-ci sont encodés à l'aide d'un alphabet.

Encodage des points de contrôle

- M désigne un point massique,
- P désigne un point pondéré de poids non nul,
- V désigne un vecteur (de poids nul),
- $\overrightarrow{0}$ désigne le vecteur nul.

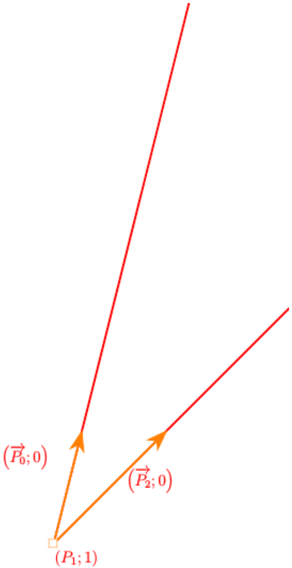
On ajoute le symbole λ et λV désigne un vecteur colinéaire à V, λP désigne le point P.

Éléments des tracés manuscrits

Le crochet 

Avec des droites asymptotes

- On choisit les deux directions asymptotiques (deux vecteurs).

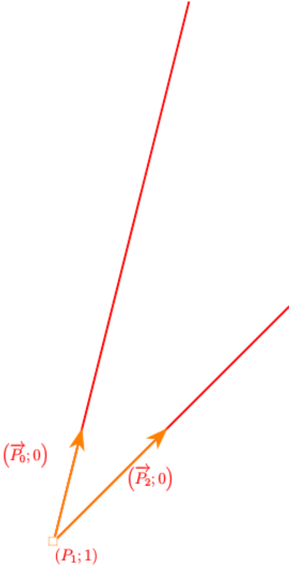


Éléments des tracés manuscrits

Le crochet 

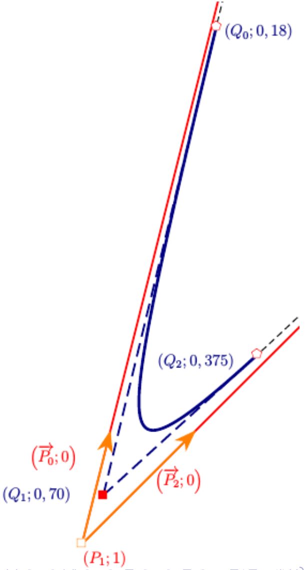
Avec des droites asymptotes

- On choisit les deux directions asymptotiques (deux vecteurs).
- On choisit le sommet de l'hyperbole (un point).



Avec des droites asymptotes

- On choisit les deux directions asymptotiques (deux vecteurs).
- On choisit le sommet de l'hyperbole (un point).
- Le changement de paramètre homographique permet de sélectionner la partie utile de la courbe.

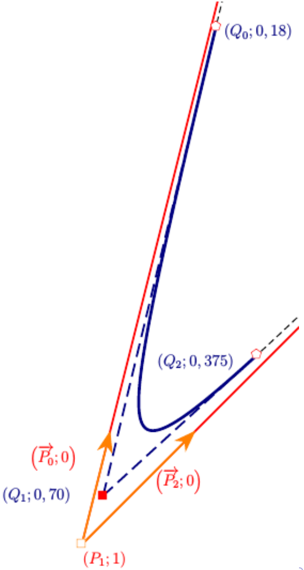


Éléments des tracés manuscrits

Le crochet 

Avec des droites asymptotes

- On choisit les deux directions asymptotiques (deux vecteurs).
- On choisit le sommet de l'hyperbole (un point).
- Le changement de paramètre homographique permet de sélectionner la partie utile de la courbe.
- Le mot associé à cette configuration est : *VPV*

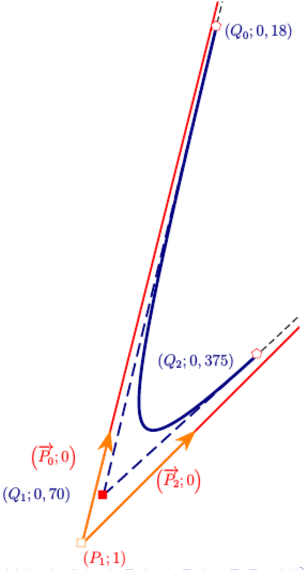


Éléments des tracés manuscrits

Le crochet 

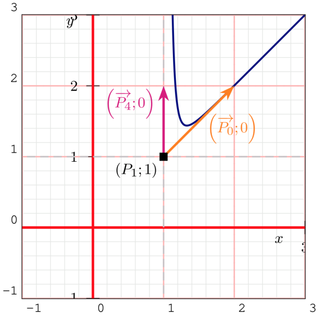
Avec des droites asymptotes

- Plus généralement le mot $V\overrightarrow{0}^*PM^+ + M^+P\overrightarrow{0}^*V$ caractérise cette situation.



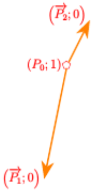
Avec des droites asymptotes

- Plus généralement le mot $V\overrightarrow{0}^*PM^+ + M^+P\overrightarrow{0}^*V$ caractérise cette situation.
- L'ajout de vecteurs nuls permet de contrôler la « tension » sur les asymptotes.



Avec une direction asymptotique

- On peut modéliser un crochet à partir

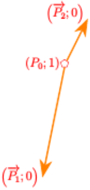


Éléments des tracés manuscrits

Le crochet 

Avec une direction asymptotique

- On peut modéliser un crochet à partir
    - d'un point de la courbe,

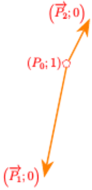


Éléments des tracés manuscrits

Le crochet 

Avec une direction asymptotique

- On peut modéliser un crochet à partir
  - d'un point de la courbe,
  - d'une tangente en ce point,

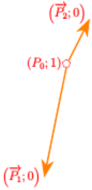


Éléments des tracés manuscrits

Le crochet 

Avec une direction asymptotique

- On peut modéliser un crochet à partir
  - d'un point de la courbe,
  - d'une tangente en ce point,
  - et d'une direction asymptotique.

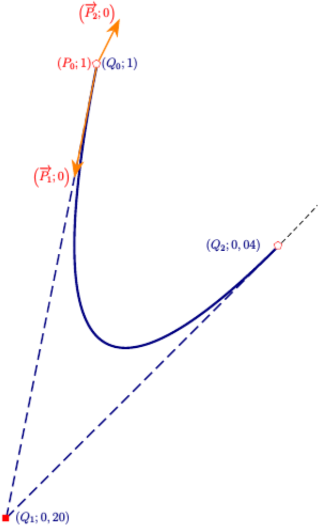


Éléments des tracés manuscrits

Le crochet 

Avec une direction asymptotique

- On peut modéliser un crochet à partir
  - d'un point de la courbe,
  - d'une tangente en ce point,
  - et d'une direction asymptotique.
- Cela définit une parabole.

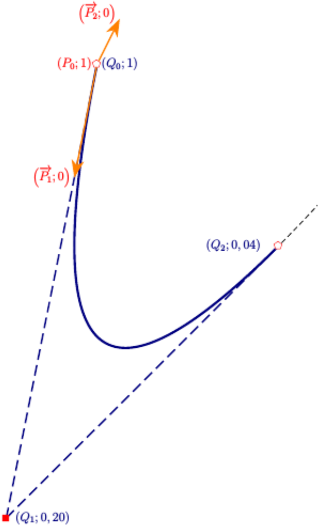


Éléments des tracés manuscrits

Le crochet 

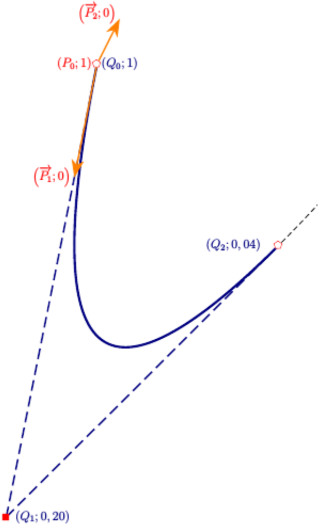
Avec une direction asymptotique

- On peut modéliser un crochet à partir
  - d'un point de la courbe,
  - d'une tangente en ce point,
  - et d'une direction asymptotique.
- Cela définit une parabole.
- Le changement de paramètre homographique permet de sélectionner la partie utile de la courbe.



Avec une direction asymptotique

- On peut modéliser un crochet à partir
  - d'un point de la courbe,
  - d'une tangente en ce point,
  - et d'une direction asymptotique.
- Cela définit une parabole.
- Le changement de paramètre homographique permet de sélectionner la partie utile de la courbe.
- Le mot associé à cette configuration est : *PVV*

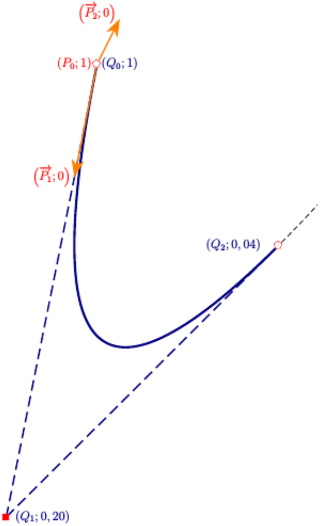


Éléments des tracés manuscrits

Le crochet 

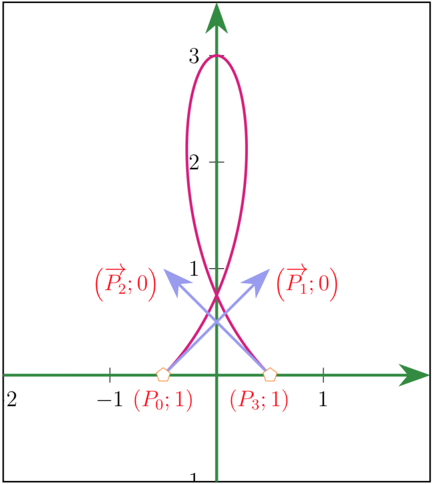
Avec une direction asymptotique

- On peut modéliser un crochet à partir
  - d'un point de la courbe,
  - d'une tangente en ce point,
  - et d'une direction asymptotique.
- Cela définit une parabole.
- Le changement de paramètre homographique permet de sélectionner la partie utile de la courbe.
- Le mot associé à cette configuration est : PVV
- Plus généralement le mot $VV^+PM^* + M^*PV^+V$ caractérise cette situation.



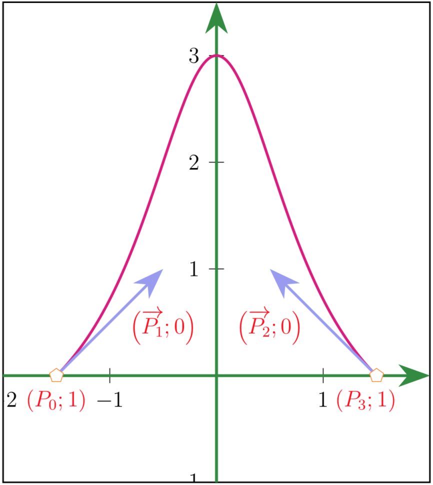
Condition nécessaire pour une boucle

- Pour obtenir une boucle, on doit avoir une configuration correspondant au mot : PM^+M^+P.
- On peut alors sélectionner les parties utiles de la boucle



Classification des courbes de type $P_0, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, P_3$

- On n'a qu'une condition nécessaire.

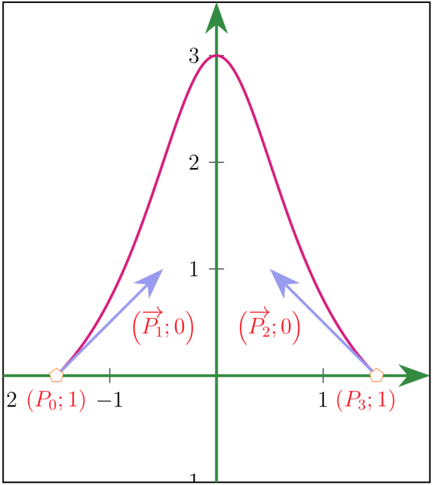


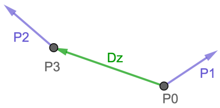
Éléments des tracés manuscrits

La boucle

Classification des courbes de type $P_0, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, P_3$

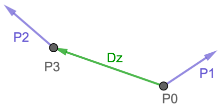
- On n'a qu'une condition nécessaire.
- On sait déterminer quand on a une boucle pour le cas simple :





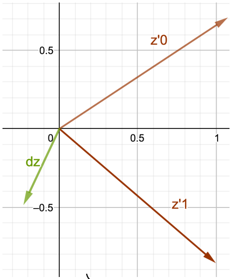
Classification des courbes de type $P_0, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, P_3$

- On n'a qu'une condition nécessaire.
- On sait déterminer quand on a une boucle pour le cas simple :



Classification des courbes de type $P_0, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, P_3$

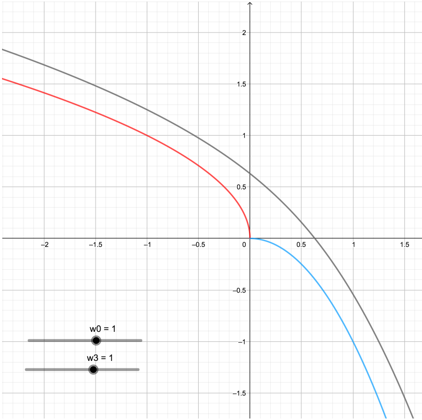
- On n'a qu'une condition nécessaire.
- On sait déterminer quand on a une boucle pour le cas simple :
    - Selon la position de l'extrémité du vecteur dz.



Où $z'0 = \frac{3}{\omega_0}\overrightarrow{P_1}$, $z'1 = -\frac{3}{\omega_3}\overrightarrow{P_2}$.

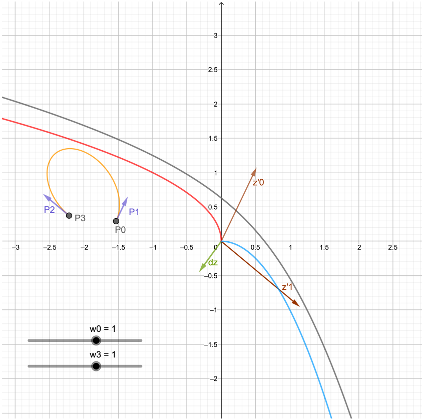
Classification des courbes de type $P_0, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, P_3$

- On n'a qu'une condition nécessaire.
- On sait déterminer quand on a une boucle pour le cas simple :
  - Selon la position de l'extrémité du vecteur *dz*.



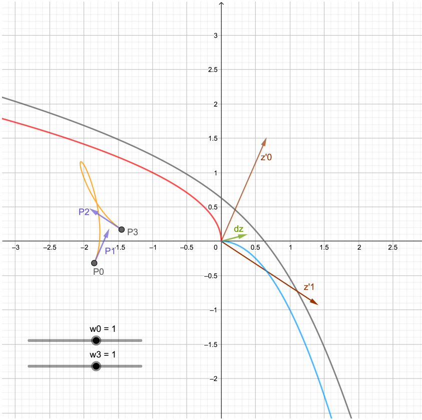
Classification des courbes de type $P_0, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, P_3$

- On n'a qu'une condition nécessaire.
- On sait déterminer quand on a une boucle pour le cas simple :
  - Selon la position de l'extrémité du vecteur dz.



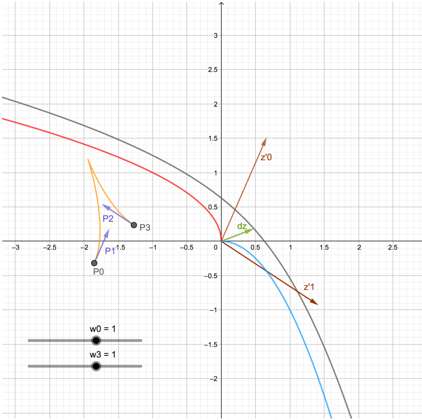
Classification des courbes de type $P_0, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, P_3$

- On n'a qu'une condition nécessaire.
- On sait déterminer quand on a une boucle pour le cas simple :
  - Selon la position de l'extrémité du vecteur dz.



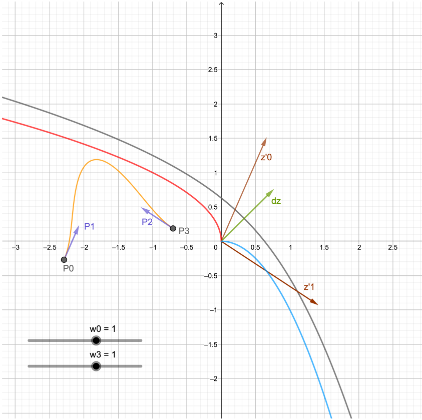
Classification des courbes de type $P_0, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, P_3$

- On n'a qu'une condition nécessaire.
- On sait déterminer quand on a une boucle pour le cas simple :
    - Selon la position de l'extrémité du vecteur dz.



Classification des courbes de type $P_0, \overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, P_3$

- On n'a qu'une condition nécessaire.
- On sait déterminer quand on a une boucle pour le cas simple :
    - Selon la position de l'extrémité du vecteur dz.



Éléments des tracés manuscrits

L'union et l'ovale

L'union

- L'union est caractérisée par le mot : PM^+P.

Éléments des tracés manuscrits

L'union  et l'ovale 

L'union

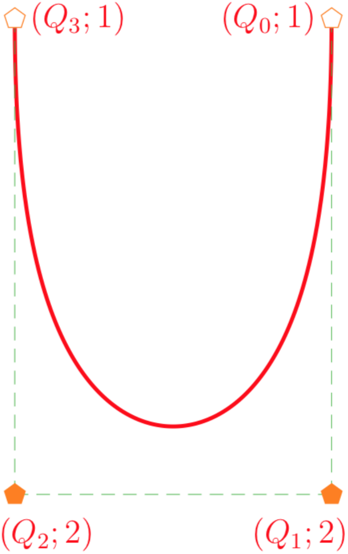
- L'union est caractérisée par le mot : $PM^{+}P$.
- On peut construire des unions du degré que l'on souhaite

Éléments des tracés manuscrits

L'union  et l'ovale 

L'union

- L'union est caractérisée par le mot : $PM^{+}P$.
- On peut construire des unions du degré que l'on souhaite
  - avec seulement des points pondérés,

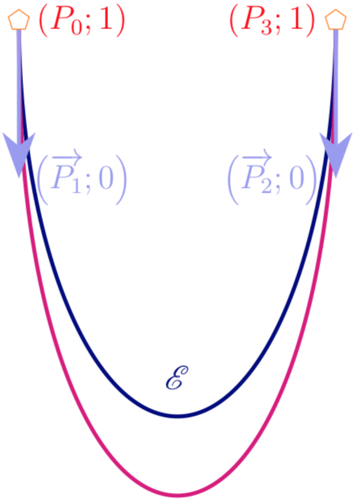


Éléments des tracés manuscrits

L'union et l'ovale

L'union

- L'union est caractérisée par le mot : PM^+P.
- On peut construire des unions du degré que l'on souhaite
  - avec seulement des points pondérés,
  - avec des points pondérés et des vecteurs.



Éléments des tracés manuscrits

L'union  et l'ovale 

L'ovale

- Pour que le paramètre varie dans $[0, 1]$,

Éléments des tracés manuscrits

L'union et l'ovale

L'ovale

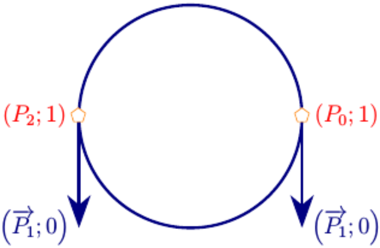
- Pour que le paramètre varie dans $[0, 1]$,
    - On doit utiliser deux arcs de courbes.

L'ovale

- Pour que le paramètre varie dans $[0, 1]$,
  - On doit utiliser deux arcs de courbes.
  - Cela correspond au mot : $P_0 M^+ P M^+ P_0$.

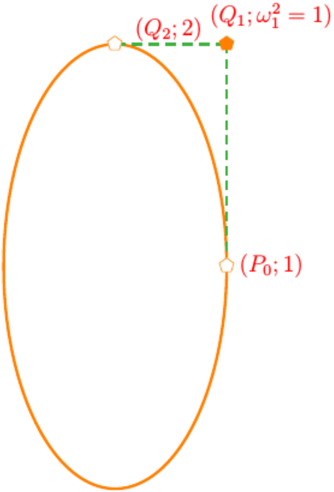
L'ovale

- Pour que le paramètre varie dans $[0, 1]$,
  - On doit utiliser deux arcs de courbes.
  - Cela correspond au mot : $P_0 M^+ P M^+ P_0$.
- Un cas simple est le cercle.



L'ovale

- Pour que le paramètre varie dans $[0, 1]$,
  - On doit utiliser deux arcs de courbes.
  - Cela correspond au mot : $P_0M^+PM^+P_0$.
- Un cas simple est le cercle.
- On peut aussi utiliser un arc d'ellipse et son complémentaire.

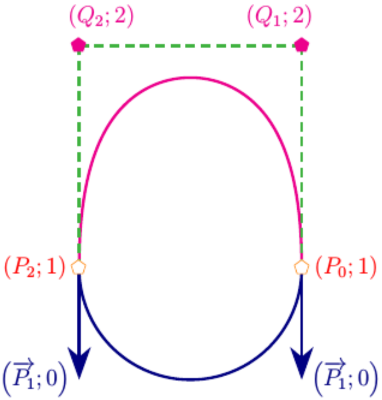


Éléments des tracés manuscrits

L'union  et l'ovale 

L'ovale

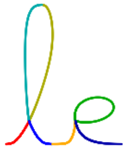
- Pour que le paramètre varie dans $[0, 1]$,
  - On doit utiliser deux arcs de courbes.
  - Cela correspond au mot : $P_0M^+PM^+P_0$.
- Un cas simple est le cercle.
- On peut aussi utiliser un arc d'ellipse et son complémentaire.
- Et plus généralement, associer deux unions quelconques.



Assemblage et cinématique

L'exemple de l'article « le »

- Les lettres sont composées d'assemblages de tracés élémentaires.



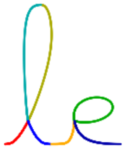
lien vers l'outil logiciel pour réaliser des tracés

Courbes de Bézier massiques en Javascript

Assemblage et cinématique

L'exemple de l'article « le »

- Les lettres sont composées d'assemblages de tracés élémentaires.
- Les jonctions sont C^1.



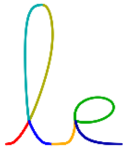
lien vers l'outil logiciel pour réaliser des tracés

Courbes de Bézier massiques en Javascript

Assemblage et cinématique

L'exemple de l'article « le »

- Les lettres sont composées d'assemblages de tracés élémentaires.
- Les jonctions sont C^1.
- Il y a des points stationnaires.



lien vers l'outil logiciel pour réaliser des tracés

Courbes de Bézier massiques en Javascript

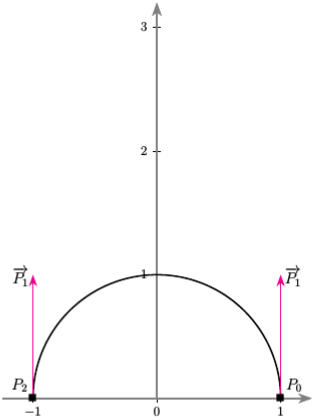
Le vecteur nul contrôle les points stationnaires

- L'introduction des points stationnaires est caractérisée par le mot :

  $P\,\overrightarrow{0}^+\,M^+ + M^+\,\overrightarrow{0}^+\,P$

  ou le mot :

  $P\,(\lambda P)^+\,M^+ + M^+\,(\lambda P)^+\,P$



$(P_0;1)$, $(\overrightarrow{P_1};0)$ et $(P_2;1)$

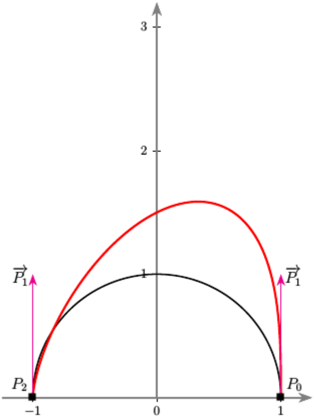
Le vecteur nul contrôle les points stationnaires

- L'introduction des points stationnaires est caractérisée par le mot :

  $P\,\overrightarrow{0}^+\,M^+ + M^+\,\overrightarrow{0}^+P$

  ou le mot :

  $P\,(\lambda P)^+\ M^+ + M^+\,(\lambda P)^+\ P$



$(P_0;1)$, $(\overrightarrow{P_1};0)$ et $(P_2;1)$

$(P_0;1)$, $(\overrightarrow{P_1};0)$, $(\overrightarrow{0};0)$ et $(P_2;1)$

Assemblage et cinématique

Points stationnaires

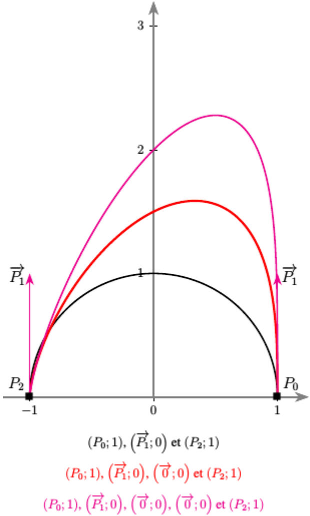
Le vecteur nul contrôle les points stationnaires

- L'introduction des points stationnaires est caractérisée par le mot :

  $$P\,\overrightarrow{0}^{+}\,M^{+} + M^{+}\,\overrightarrow{0}^{+}P$$

  ou le mot :

  $$P\,(\lambda P)^{+}\;M^{+} + M^{+}\,(\lambda P)^{+}\;P$$



Assemblage et cinématique

Points stationnaires

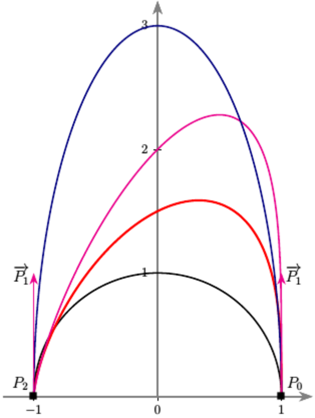
Le vecteur nul contrôle les points stationnaires

- L'introduction des points stationnaires est caractérisée par le mot :

  $P\,\overrightarrow{0}^{+}\,M^{+} + M^{+}\,\overrightarrow{0}^{+}P$

  ou le mot :

  $P\,(\lambda P)^{+}\;M^{+} + M^{+}\,(\lambda P)^{+}\;P$



$(P_0;1)$, $(\overrightarrow{P_1};0)$ et $(P_2;1)$

$(P_0;1)$, $(\overrightarrow{P_1};0)$, $(\overrightarrow{0};0)$ et $(P_2;1)$

$(P_0;1)$, $(\overrightarrow{P_1};0)$, $(\overrightarrow{0};0)$, $(\overrightarrow{0};0)$ et $(P_2;1)$

$(P_0;1)$, $(\overrightarrow{0};0)$, $(\overrightarrow{P_1};0)$, $(\overrightarrow{0};0)$ et $(P_2;1)$

Contrôle global des tracés

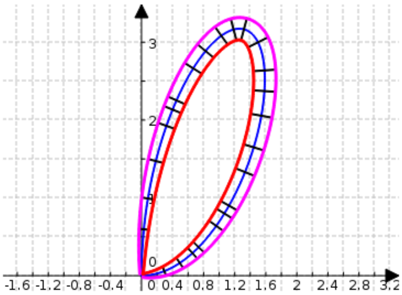
Pleins et déliés

Le contrôle global des tracés a pour objectif de rendre compte de caractéristiques « physiques » du tracé.

Le contrôle global des tracés a pour objectif de rendre compte de caractéristiques « physiques » du tracé.

Pleins et déliés

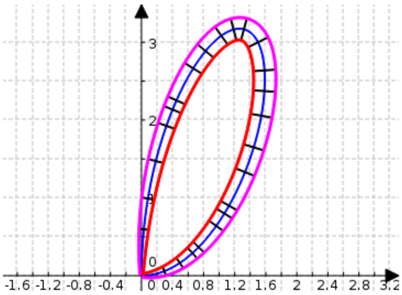
- Il s'agit de construire deux courbes offset



Le contrôle global des tracés a pour objectif de rendre compte de caractéristiques « physiques » du tracé.

Pleins et déliés

- Il s'agit de construire deux courbes offset
  - Il faut pouvoir contrôler la distance à la courbe



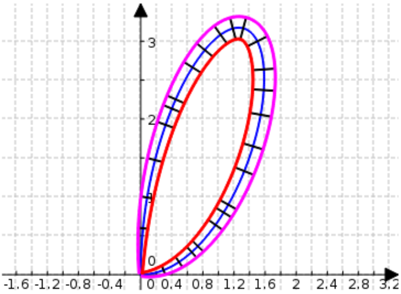
Contrôle global des tracés

Pleins et déliés

Le contrôle global des tracés a pour objectif de rendre compte de caractéristiques « physiques » du tracé.

Pleins et déliés

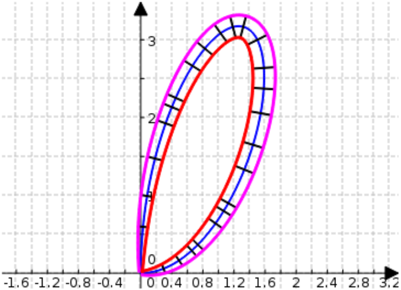
- Il s'agit de construire deux courbes offset
  - Il faut pouvoir contrôler la distance à la courbe
- Le problème se ramène au calcul de l'enveloppe d'une famille de cercles de rayons variables.



Le contrôle global des tracés a pour objectif de rendre compte de caractéristiques « physiques » du tracé.

Pleins et déliés

- Il s'agit de construire deux courbes offset
  - Il faut pouvoir contrôler la distance à la courbe
- Le problème se ramène au calcul de l'enveloppe d'une famille de cercles de rayons variables.
  - Ce problème se résout facilement dans l'espace des cercles.



Contrôle global des tracés

Utilisation de poids complexes

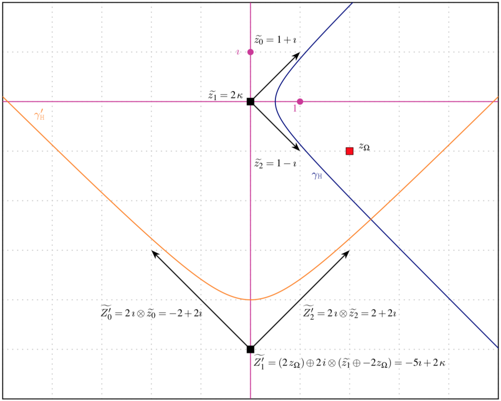
- Un autre contrôle global est la transformation géométrique d'un tracé.

Contrôle global des tracés
Utilisation de poids complexes

- Un autre contrôle global est la transformation géométrique d'un tracé.

Transformations géométriques

- Poids complexes et vecteurs
  - Rotations, homothéties et similitudes



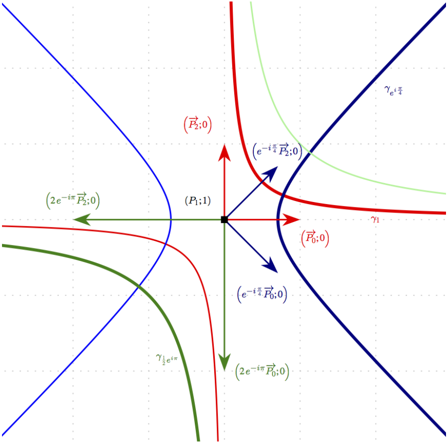
Contrôle global des tracés

Utilisation de poids complexes

- Un autre contrôle global est la transformation géométrique d'un tracé.

Transformations géométriques

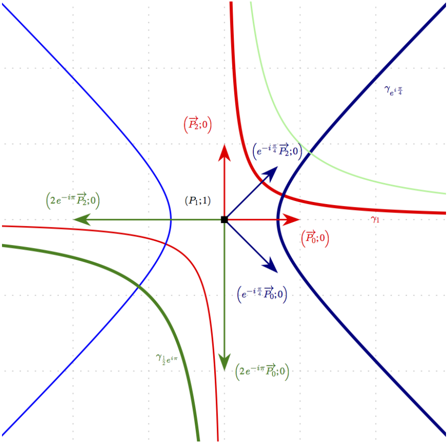
- Poids complexes et vecteurs
  - Rotations, homothéties et similitudes
  - Un calcul simple sur les points massiques.



- Un autre contrôle global est la transformation géométrique d'un tracé.

Transformations géométriques

- Poids complexes et vecteurs
  - Rotations, homothéties et similitudes
  - Un calcul simple sur les points massiques.
- Utilisation des propriétés géométriques des points massiques.



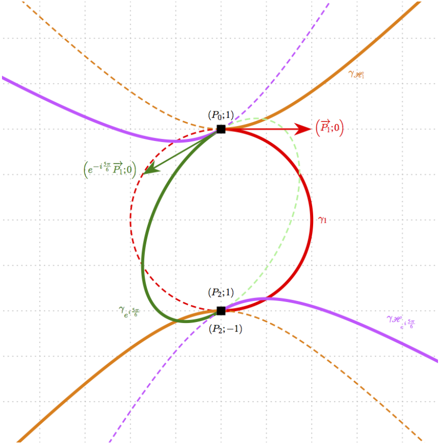
Contrôle global des tracés

Utilisation de poids complexes

- Un autre contrôle global est la transformation géométrique d'un tracé.

Transformations géométriques

- Poids complexes et vecteurs
  - Rotations, homothéties et similitudes
  - Un calcul simple sur les points massiques.
- Utilisation des propriétés géométriques des points massiques.
- Permet de « joindre » facilement des arcs de coniques.



Conclusion

Bilan

- L'utilisation des courbes de Bézier rationnelles à points massiques :

Conclusion

Bilan

- L'utilisation des courbes de Bézier rationnelles à points massiques :
  - Permet de modéliser facilement des tracés élémentaires proposés par Edelman et Flash.

Conclusion

Bilan

- L'utilisation des courbes de Bézier rationnelles à points massiques :
    - Permet de modéliser facilement des tracés élémentaires proposés par Edelman et Flash.
    - Les aspects cinématiques des assemblages des tracés sont maîtrisés.

Conclusion

Bilan

- L'utilisation des courbes de Bézier rationnelles à points massiques :
  - Permet de modéliser facilement des tracés élémentaires proposés par Edelman et Flash.
  - Les aspects cinématiques des assemblages des tracés sont maîtrisés.
  - L'ensemble des généralisations apportées par les points massiques sont utilisées.

Conclusion

Bilan

- L'utilisation des courbes de Bézier rationnelles à points massiques :
  - Permet de modéliser facilement des tracés élémentaires proposés par Edelman et Flash.
  - Les aspects cinématiques des assemblages des tracés sont maîtrisés.
  - L'ensemble des généralisations apportées par les points massiques sont utilisées.

La suite

- Mieux comprendre les assemblages :

Conclusion

Bilan

- L'utilisation des courbes de Bézier rationnelles à points massiques :
  - Permet de modéliser facilement des tracés élémentaires proposés par Edelman et Flash.
  - Les aspects cinématiques des assemblages des tracés sont maîtrisés.
  - L'ensemble des généralisations apportées par les points massiques sont utilisées.

La suite

- Mieux comprendre les assemblages :
  - Le découpage des lettres est contraint par la cinématique (paramétrage sur $[0, 1]$).

Conclusion

Bilan

- L'utilisation des courbes de Bézier rationnelles à points massiques :
  - Permet de modéliser facilement des tracés élémentaires proposés par Edelman et Flash.
  - Les aspects cinématiques des assemblages des tracés sont maîtrisés.
  - L'ensemble des généralisations apportées par les points massiques sont utilisées.

La suite

- Mieux comprendre les assemblages :
  - Le découpage des lettres est contraint par la cinématique (paramétrage sur $[0,1]$).
  - Mieux gérer les points stationnaires.

Conclusion

Bilan

- L'utilisation des courbes de Bézier rationnelles à points massiques :
  - Permet de modéliser facilement des tracés élémentaires proposés par Edelman et Flash.
  - Les aspects cinématiques des assemblages des tracés sont maîtrisés.
  - L'ensemble des généralisations apportées par les points massiques sont utilisées.

La suite

- Mieux comprendre les assemblages :
  - Le découpage des lettres est contraint par la cinématique (paramétrage sur $[0, 1]$).
  - Mieux gérer les points stationnaires.
- Trouver les endroits où découper :

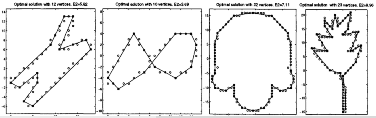
Conclusion

Bilan

- L'utilisation des courbes de Bézier rationnelles à points massiques :
  - Permet de modéliser facilement des tracés élémentaires proposés par Edelman et Flash.
  - Les aspects cinématiques des assemblages des tracés sont maîtrisés.
  - L'ensemble des généralisations apportées par les points massiques sont utilisées.

La suite

- Mieux comprendre les assemblages :
  - Le découpage des lettres est contraint par la cinématique (paramétrage sur $[0, 1]$).
  - Mieux gérer les points stationnaires.
- Trouver les endroits où découper :
  - Les points dominants. (D'après [Cor97])



Bibliographie I

Philippe Cornic, Another look at the dominant point detection of digital curves, Pattern Recognition Letters **18** (1997), 13–25.

Shimon Edelman and Tamar Flash, A model of handwriting, Biological Cybernetics **57** (1987), 25–36.

Bibliographie II

Sérier Karine, Jean-Paul Bécar, Laurent Fuchs et Lionel Garnier, Handwritten characters strokes with mass cubics and their singularities, Curves and Surfaces (Arcachon), 28 juin - 4 juillet 2018.

Jean-Paul Bécar, Laurent Fuchs et Lionel Garnier, Modéliser un demi-cercle et autres questions de poids nuls, JF.IG.RV (Poitiers), 13-16 novembre 2018.

______, Courbe d'une fraction rationnelle et courbes de Bézier à points massiques, Journée du GTMG (Toulouse, France), 20-21 mars 2019.

______, Famille à un paramètre de coniques utilisant des courbes de Bézier à poids complexes, Journée du GTMG (Toulouse, France), 20-21 mars 2019.

______, Introduction à la modélisation de l'écriture manuscrite par des courbes Bézier rationnelles massiques, JF.IG.RV (Marseille), 12-15 novembre 2019.

Propriété différentielle, *n* entier supérieur ou égal à 2

Théorème (Vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ en P_0, $\omega_0 \neq 0$)

Soit une courbe de Bézier de points de contrôle $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ *et ...*

- *si* $\omega_1 = 0$ *:*
$$\overrightarrow{v_0} = \frac{n}{\omega_0}\overrightarrow{P_1} \qquad (1)$$
- *si* $\omega_1 \neq 0$ *:*
$$\overrightarrow{v_0} = n\frac{\omega_1}{\omega_0}\overrightarrow{P_0P_1} \qquad (2)$$

Retour

Propriété différentielle, *n* entier supérieur ou égal à 2

Théorème (Vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ en P_0, $\omega_0 \neq 0$)

Soit une courbe de Bézier de points de contrôle $(P_0; \omega_0)$, $(P_1; \omega_1)$ *et ...*

- *si* $\omega_1 = 0$ *:*
$$\overrightarrow{v_0} = \frac{n}{\omega_0}\overrightarrow{P_1} \qquad (1)$$
- *si* $\omega_1 \neq 0$ *:*
$$\overrightarrow{v_0} = n\frac{\omega_1}{\omega_0}\overrightarrow{P_0P_1} \qquad (2)$$

Théorème (Vecteur vitesse $\overrightarrow{v_n}$ en P_n, $\omega_n \neq 0$)

Soit une courbe de Bézier de points de contrôle ..., $(P_{n-1}; \omega_{n-1})$, $(P_n; \omega_n)$.

- *si* $\omega_{n-1} = 0$ *:*
$$\overrightarrow{v_n} = -\frac{n}{\omega_n}\overrightarrow{P_{n-1}} \qquad (3)$$
- *si* $\omega_{n-1} \neq 0$ *:*
$$\overrightarrow{v_n} = -n\frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\overrightarrow{P_nP_{n-1}} \qquad (4)$$

Retour